

KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów gimnazjów w roku szkolnym 2012/13
III etap zawodów (wojewódzki)
12 stycznia 2013 r.

Propozycja punktowania rozwiązań zadań

Uwaga

Łącznie uczeń może zdobyć **20 punktów**.

Laureatami zostają uczestnicy etapu wojewódzkiego, którzy uzyskali, co najmniej 80 % punktów możliwych do zdobycia, czyli **16 punktów**.

Finalistami zostają uczestnicy etapu wojewódzkiego, którzy uzyskali, co najmniej 60% punktów możliwych do zdobycia, czyli **12 punktów**.

Za każde poprawne rozwiązanie inne niż przewidziane w propozycji punktowania rozwiązań zadań przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

Zadanie 1.

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej m liczba postaci $m^5 - m$ jest podzielna przez 30.

Uczeń:	
• stosując wzory skróconego mnożenia przedstawia podane wyrażenie w postaci iloczynu	1 pkt
• zauważa, że aby dowolna liczba całkowita była podzielna przez 30 musi być podzielna przez 2, przez 3 i przez 5	1 pkt
• uzasadnia, że dla dowolnej liczby całkowitej liczba postaci $m^5 - m$ jest podzielna przez 2 i przez 3,	1 pkt
• uzasadnia, że dla dowolnej liczby całkowitej liczba postaci $m^5 - m$ jest podzielna przez 5.	1 pkt

- $m^5 - m = m \cdot (m^4 - 1) = m \cdot (m^2 - 1) \cdot (m^2 + 1) = m \cdot (m - 1) \cdot (m + 1) \cdot (m^2 + 1)$
- Aby wykazać, że liczba $m^5 - m$ jest podzielna przez 30 wystarczy wykazać, że jest podzielna przez 2, przez 3 i przez 5.
- Wyrażenie $m^5 - m$ można zapisać jako iloczyn czterech liczb naturalnych: $(m - 1) \cdot m \cdot (m + 1) \cdot (m^2 + 1)$. Trzy pierwsze liczby iloczynu: $(m - 1)$, m oraz $(m + 1)$ to kolejne liczby całkowite, a więc wśród nich jest liczba podzielna przez 3 i co najmniej jedna liczba podzielna przez 2.
- Teraz wystarczy wykazać, że liczba $(m - 1) \cdot m \cdot (m + 1) \cdot (m^2 + 1)$ jest podzielna przez 5. Jeśli wśród liczb $(m - 1)$, m lub $(m + 1)$ jest liczba podzielna przez 5 to mamy tezę. W przeciwnym wypadku kolejne liczby całkowite przy dzieleniu przez 5 dają reszty 1, 2, 3 lub 4, czyli mamy:

$$\begin{aligned}(m-1) &= 5k+1, \\ m &= 5k+2 \\ (m+1) &= 5k+3\end{aligned}$$

lub

$$\begin{aligned}(m-1) &= 5k+2, \\ m &= 5k+3 \\ (m+1) &= 5k+4\end{aligned}$$

czyli:

$$\begin{aligned}(m^2+1) &= (5k+2)^2+1= \\ &= 25k^2+20k+4+1= \\ &= 5(5k^2+4k+1)\end{aligned}$$

czyli:

$$\begin{aligned}(m^2+1) &= (5k+3)^2+1= \\ &= 25k^2+30k+9+1= \\ &= 5(5k^2+15k+2)\end{aligned}$$

W obu przypadkach otrzymaliśmy wielokrotność liczby 5, co kończy dowód.

Zadanie 2.

Jeżeli długość i szerokość prostokąta $ABCD$ zwiększymy o 10 cm, to jego pole zwiększy się o 600 cm^2 . Oblicz, o ile zmniejszy się pole prostokąta $ABCD$ jeżeli jego długość i szerokość zmniejszymy o 5 cm.

Uczeń:	
• zapisuje pole prostokąta $ABCD$ oraz pole prostokąta po wydłużeniu boków,	1 pkt
• z zależności pomiędzy polem prostokąta $ABCD$, a polem prostokąta po wydłużeniu boków wyznacza wartość sumy $a+b$,	1 pkt
• zapisuje pole prostokąta po skróceniu boków,	1 pkt
• układa zależność pomiędzy polem prostokąta $ABCD$, a polem prostokąta po skróceniu boków i wyznacza o ile zmniejszyło się pole prostokąta $ABCD$.	1 pkt

I sposób:

1. Na początku:

Pole prostokąta $ABCD$: $P = ab$

Po wydłużeniu boków: $P_w = (a+10)(b+10) = ab + 10a + 10b + 100 = P + 10a + 10b + 100$

$$P + 600 = P + 10a + 10b + 100$$

2. Wniosek: $10a + 10b = 500$

$$a + b = 50$$

3. Po skróceniu boków: $P_s = (a-5)(b-5) = ab - 5a - 5b + 25 = P - 5a - 5b + 25$

$$P - x = P - 5a - 5b + 25$$

$$x = 5a + 5b - 25$$

4. Wniosek: $x = 5(a+b) - 25$

$$x = 5 \cdot 50 - 25$$

$$x = 225$$

Odp. Jeśli długość i szerokość prostokąta $ABCD$ zmniejszymy o 5 cm to jego pole zmniejszy się o 225 cm^2 .

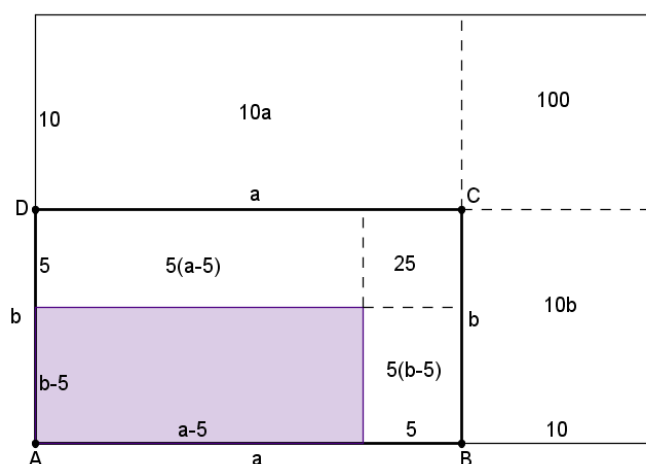
II sposób:

1. rysunek:

2. $10a + 10b + 100 = 600 \Rightarrow a + b = 50$

3.

$$5a - 25 + 5b - 25 + 25 = 5a + 5b - 25 = \\ = 5(a + b) - 25 = 5 \cdot 50 - 25 = 250 - 25 = 225$$

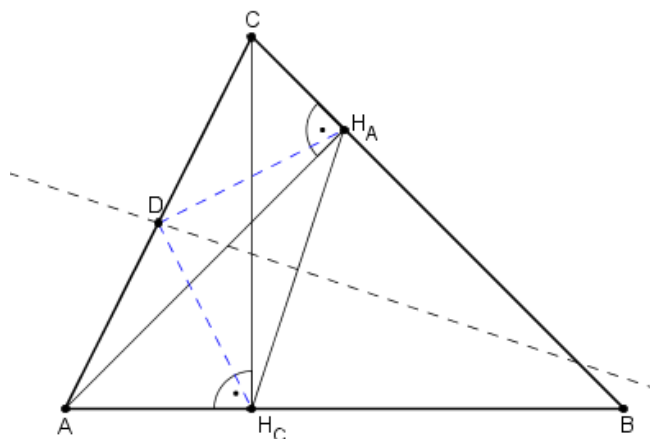


Zadanie 3.

W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości AH_a oraz CH_c , gdzie H_a to spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka A , a H_c to spodek wysokości opuszczonej z wierzchołka C . Uzasadnij, że środek boku AC należy do symetralnej odcinka H_aH_c .

Uczeń:	
• wykonuje rysunek z oznaczeniami,	1 pkt
• wykorzystuje własność symetralnej odcinka,	1 pkt
• zauważa, że w trójkącie prostokątnym AH_aC odcinki AD , DC oraz DH_a są równej długości (np. jako promień okręgu opisanego na tym trójkącie),	1 pkt
• zauważa, że w trójkącie prostokątnym AH_cC odcinki AD , DC oraz DH_c są równej długości (jw.).	1 pkt

1. Rysunek



2. Aby udowodnić, że punkt D będący środkiem boku AC należy do symetralnej odcinka H_aH_c wystarczy wykazać, że $|DH_a| = |DH_c|$

3. Odcinek DH_a to promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym AH_aC , więc $|AD| = |DC| = |DH_a| = \frac{1}{2}|AC|$,

4. Odcinek DH_c to promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym AH_cC , więc $|AD| = |DC| = |DH_c| = \frac{1}{2}|AC|$.

Zadanie 4.

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n , gdzie n jest liczbą ze zbioru $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, spełniające równanie: $n \cdot 3^n - 3n = 6 - 2 \cdot 3^n$

Uczeń:	
• porządkuje wyrazy i rozkłada sumę na iloczyn,	1 pkt
• oblicza pierwiastek równania $3^n - 3 = 0$,	1 pkt
• oblicza pierwiastek równania $n + 2 = 0$	1 pkt
• prawidłowo interpretuje otrzymane rozwiązania i podaje odpowiedź.	1 pkt

$$n \cdot 3^n - 3n = 6 - 2 \cdot 3^n$$

$$n \cdot 3^n - 3n - 6 + 2 \cdot 3^n = 0$$

$$1). \quad n(3^n - 3) + 2(3^n - 3) = 0$$

$$(3^n - 3)(n + 2) = 0$$

$$3^n - 3 = 0$$

$$2). \quad 3^n = 3 \quad \text{lub} \quad n + 2 = 0$$

$$n = 1$$

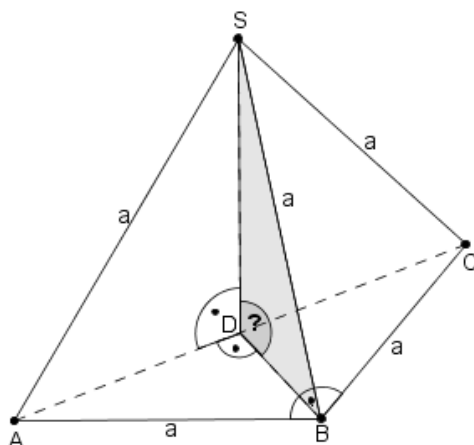
$$n = -2$$

Odp. Jedynym naturalnym pierwiastkiem tego równania jest liczba 1.

Zadanie 5.

W ostrosłupie trójkątnym $ABCS$ wszystkie krawędzie boczne mają długość a . Podstawą tego ostrosłupa jest trójkąt prostokątny równoramienny ABC o przyprostokątnych długości a , punkt S jest jego wierzchołkiem. Oblicz objętość ostrosłupa $ABCS$.

Uczeń:	
• wykonuje rysunek, ustala położenie ścian względem podstawy ostrosłupa,	1 pkt
• oblicza długość odcinka SD – wysokości ściany bocznej ACS ,	1 pkt
• uzasadnia, że trójkąt SDB jest prostokątny (np. stosując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa lub wykorzystując sześcian do narysowania danej w zadaniu bryły) i ustala wysokość ostrosłupa $ABCS$,	1 pkt
• oblicza objętość ostrosłupa $ABCS$.	1 pkt



1. W trójkącie prostokątnym ABC mamy: $|AB| = a$, $|BC| = a$, $|AC| = a\sqrt{2}$, $|AD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

2. Obliczamy wysokość DS w trójkącie równoramiennym ACS :

$$|DS|^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \Rightarrow |DS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

3. W trójkącie ADS mamy długości boków: $|AD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|AS| = a$, $|DS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

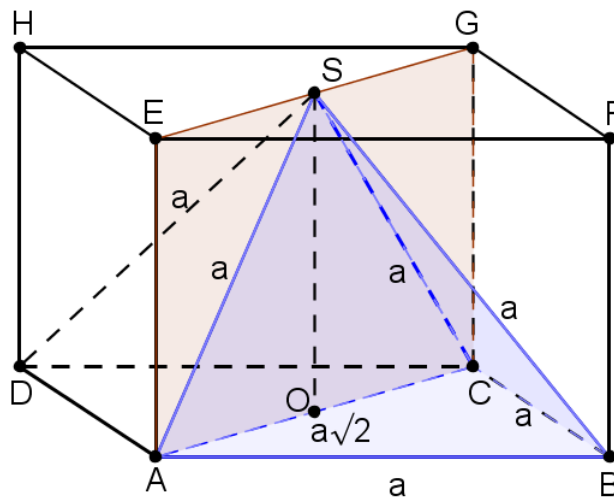
Zauważmy, że:

$$|DC|^2 = \frac{a^2}{2}, \quad |CS|^2 = a^2, \quad |DS|^2 = \frac{a^2}{2}, \quad \text{oraz:} \quad \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = a^2$$

Na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa – trójkąt ADS jest prostokątny. Zatem DS – wysokość trójkąta ADS i jednocześnie wysokość równoramiennego trójkąta ACS , a zarazem wysokość ostrosłupa $ABCS$.

$$4. V_{ABCS} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} [j^3]$$

II sposób:



1. Zauważmy, że objętość ostrosłupa $ABCS$, spełniającego warunki zadania jest połową objętości ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDS$.

2. Obliczamy długość odcinka OS :

$$|OS|^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4} \Rightarrow |OS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$3. V_{ABCDS} = \frac{1}{3} a^2 \cdot |OS| = \frac{1}{3} a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{6}$$

$$4. V_{ABCS} = \frac{1}{2} \cdot V_{ABCDS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 \sqrt{2}}{6} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12} [j^3]$$